

## Capture d'interface et application au procédé d'injection assistée eau.

Walid Zerguine (a), Luisa Silva (a, b), Thierry Coupez (a), Hugues Dignonnet (a) et Andrés Rodriguez-Villa (c).

(a)Centre de Mise en Forme des Matériaux, École des Mines de Paris, France

(b)Dep. de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Universidade do Porto, Portugal

(c)Transvalor S.A

1, rue Claude Daunesse BP207 F-06904 Sophia Antipolis Cedex

walid.zerguine@ensmp.fr

### Résumé :

*Nous proposons une amélioration des techniques de capture d'interfaces, pour la simulation d'écoulements multiphasiques, en utilisant une méthode de h-adaptation de maillage. Une technique d'adaptation de maillage anisotrope basée sur les variations de gradients de la fonction level-set permet de capturer les discontinuités des paramètres physiques qui caractérisent les écoulements fortement hétérogènes.*

*Cette méthode permet l'observation précise de l'évolution des différentes phases (eau/ polymère liquide eau/ polymère solide) ainsi que leurs interactions. Une application directe de cette amélioration est la simulation des problèmes multiphasiques complexes intervenant dans le procédé de fabrication de pièces creuses tel que l'injection assistée eau.*

### Abstract :

*We propose an improvement of interface capturing techniques by using an h-adaptation technique to improve computation of the multiphase flows. An anisotropic mesh adaptation technique based on variations of the level-set function allows a better capture of the discontinuities of the physical parameters that characterize the strongly heterogeneous flows.*

*This method allows an accurate observation of the evolution of the various phases (water/liquid polymer, water solid polymer) as well as their interactions.*

*A direct application of this improvement is the simulation of complex multiphase problems involved in the manufacturing processes of hollow parts such as the water assisted injection process.*

**Mots-clefs : écoulements multiphasiques, level-set, remaillage anisotrope**

## 1 Introduction

L'Injection Assistée Eau est un procédé de fabrication d'injection de pièces creuses qui requiert une description précise de l'avancée de la veine d'eau. L'enjeu de cette étude est de décrire efficacement les calculs d'interfaces qui permettent, lors de la simulation numérique des problèmes d'écoulements multiphasiques, l'observation de l'évolution des différentes phases (eau / polymère liquide, eau / polymère solide).

Nous nous intéressons à la résolution des écoulements eau/polymère liquide. La formulation intégrale du problème utilise une description spécifique à chaque milieu et s'appuie sur les équations de Navier Stokes multiphasiques. Le calcul de la position de l'interface s'appuie sur les travaux de Osher *et al.* (1988) qui définissent une fonction level-set dont la courbe de niveau zéro est l'interface que l'on cherche à décrire. L'interface est alors un champ scalaire, qui sera transporté par la résolution d'une équation d'advection dans un champ de vitesse donné.

L'objet de notre étude est d'apporter certaines améliorations à la capture d'interface en s'appuyant sur une nouvelle stratégie de remaillage adaptatif. Celle-ci se base sur une

simplification de la mise en œuvre de la méthode de lignes de niveau, Coupez (2006) en s'affranchissant de l'étape de réinitialisation des méthodes level-set standards et d'autre part en proposant une troncature de la fonction distance autour de son zéro. Cette fonction distance est alors remplacée par une fonction sinusoïdale qui permet des raccordements réguliers.

La technique de remaillage anisotrope de la zone interface eau/polymère repose sur les variations de gradient de cette nouvelle fonction level-set. Les tailles de mailles dans chaque direction de l'espace sont ainsi contrôlées et les fortes discontinuités des paramètres physiques sont mieux capturées. L'efficacité et la robustesse de la méthode sont démontrées sur des applications complexes en injection assistée eau.

## 2 Méthode level-set locale

Le principe de la méthode level-set, Osher *et al.* (1988) est de définir une fonction distance dans le domaine de calcul dont la courbe de niveau zéro est l'interface que l'on cherche à décrire. Cette fonction level-set, associée à un sous-domaine, est la distance signée à son interface. On considère un domaine de calcul fixe  $\Omega$ .  $\Omega$  est divisé en plusieurs sous domaines qui eux ne sont pas fixes et qui dépendent du temps  $t$  :

$$\Omega = \bigcup \Omega_i(t) \quad (1)$$

Un sous domaine correspond à une phase présente dans l'écoulement simulé. Les sous domaines servent à différencier les différents gaz, fluides et solides. Nous considérons l'interface  $\Gamma_i(t)$  du sous domaine  $\Omega_i(t)$ . La méthode level-set consiste à introduire une fonction continue  $\alpha_i(x, t)$  associée à chaque sous domaine  $\Omega_i(t)$ , définie comme étant une distance signée à l'interface .

En considérant une particule  $x(t)$  placée sur  $\Gamma(t)$ , son mouvement est décrit par la vitesse  $v$ . La dérivée par rapport au temps de  $\alpha(x, t) = 0$  donne :

$$\frac{d\alpha(x, t)}{dt} = 0 \quad (2)$$

On obtient ainsi une équation de transport avec laquelle la fonction level-set est mise à jour, il reste alors à trouver le niveau zéro de la solution pour décrire l'interface. Seul le transport du niveau zéro de  $\alpha$  a un sens physique, la généralisation aux autres lignes de niveau étant simplement une extension pratique. Afin de renormaliser les lignes de niveau une étape de réinitialisation est nécessaire. En effet, l'équation de transport ne gardant pas la propriété de fonction distance, la solution peut dégénérer très vite. Il est numériquement souhaitable de garder  $\alpha$  proche d'une fonction distance signée, qui elle, avec un gradient d'ordre 1, se transporte de façon acceptable. Le processus de réinitialisation consiste alors à remplacer  $\alpha(x, t)$  par une autre fonction  $\phi(x, \tau)$  qui a la même iso zéro que  $\alpha(x, t)$  mais qui se porte mieux au transport par convection. Il s'agit alors de redonner à la fonction level-set  $\alpha$  les propriétés :  $|\nabla \alpha| = 1$  et  $\alpha(x, t) = 0$  si et seulement si  $x \in \Gamma(t)$ . Ceci est rendu possible en résolvant jusqu'à un état stationnaire une équation du type Hamilton-Jacobi initialisée avec la fonction level-set  $\alpha$  :

1.  $\phi(x, 0) = \alpha(x, t)$
2. Pour  $\tau = 0.. \varepsilon$ , résoudre  $\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = S(\phi)(1 - |\nabla \phi|)$  (3)
3.  $\alpha(x, t) = \phi(x, \varepsilon)$

avec  $\tau$  un temps fictif et  $S(\phi)$  une fonction signe définie, par exemple, dans Peng *et al.* (1999)

L'introduction de la réinitialisation conduit à des temps de calculs très importants. En effet, il s'agit de résoudre le système supplémentaire (3), pour un pas de discrétisation temporel  $\tau$  (qui est, dans notre cas de l'ordre 5 à 8 fois inférieur au pas de temps  $\Delta t$ ). Une méthode de couplage entre les équations de transport et de réinitialisation a été développée pour éviter cet inconvénient, Coupez (2006). Le système d'équations que l'on cherche à résoudre est alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \alpha \cdot v = 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} = S(\alpha)(1 - |\nabla \alpha|) \end{cases} \quad (4)$$

Nous éliminons le temps fictif en substituant localement le temps fictif par la taille de maille  $h$  et :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{h}{\Delta t} S(\alpha)(1 - |\nabla \alpha|) \quad (5)$$

En réécrivant le terme  $|\nabla \alpha| = \nabla \alpha \frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|}$  on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \alpha \cdot v + \frac{h}{\Delta t} S(\alpha) \nabla \alpha \frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} = \frac{h}{\Delta t} S(\alpha) \quad (6)$$

On reconnaît ici encore une équation de convection pure. Notre vitesse de convection  $U$  est maintenant la somme de la vitesse résultante des équations de Navier Stokes et du terme convectif de l'étape de réinitialisation :

$$U = v + \frac{h}{\Delta t} S(\alpha) \frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + U \cdot \nabla \alpha = \frac{h}{\Delta t} S(\alpha) \quad (8)$$

Puisque notre loi de mélange est locale autour d'une certaine épaisseur de l'interface il est évident que nous ne sommes intéressés que par la fonction distance proche de cette interface. La fonction  $\alpha$  peut être alors définie comme une fonction distance sur cette épaisseur. En dehors de cette zone la fonction est constante (FIG. 1 (a)).

Une telle fonction level-set, définie localement, peut cependant poser des difficultés aux points  $E/2$  et  $-E/2$ , puisque les sauts du gradient peuvent alors générer des problèmes numériques importants. On aimerait alors avoir un gradient qui soit toujours égal à 1 proche de l'interface et qui diminuerait de manière continue sur l'épaisseur. On choisit de prendre une fonction sinus pour redéfinir notre distance (FIG. 1 (c)):

$$\alpha = \frac{2E}{\Pi} \sin\left(\frac{\Pi}{2E} x\right) \quad (9)$$

et le gradient de  $\alpha$  s'écrit :

$$|\nabla \alpha| = \sqrt{1 - \left(\frac{\Pi}{2E} \alpha\right)^2} \quad (10)$$

Dans l'équation (5) la valeur 1 est alors remplacée par cette expression. Nous obtenons alors l'équation suivante :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \alpha \cdot v + \frac{h}{\Delta t} S(\alpha) \nabla \alpha \frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} = \frac{h}{\Delta t} S(\alpha) \sqrt{1 - \left(\frac{\Pi}{2E} \alpha\right)^2} \quad (11)$$

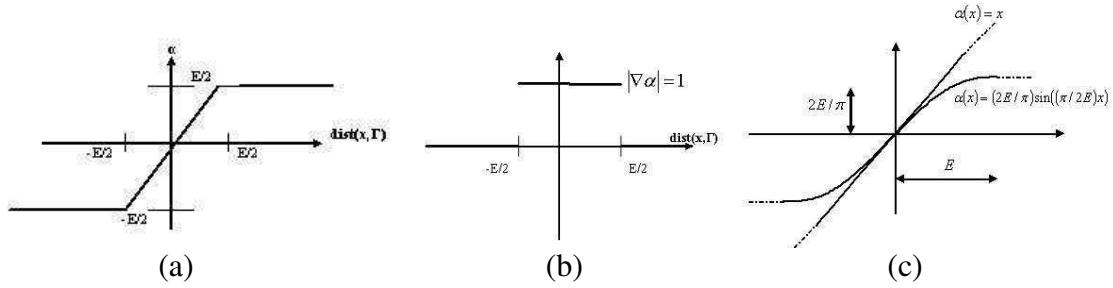


FIG. 1 – (a) fonction  $\alpha$  définie sur une épaisseur  $E$  et (b) son gradient. (c) fonction  $\alpha$  sinusoïdale.

### 3 Remaillage anisotrope aux interfaces

Afin d'obtenir une évolution de l'eau encore plus précise on a besoin d'adapter finement notre maillage dans la zone d'interface eau/polymère. En effet, les méthodes de captures d'interfaces introduites précédemment ne peuvent à elles seules résoudre de manière efficace les problèmes liés à une approche multiphasique. Les discontinuités des paramètres physiques de chaque milieu en présence engendrent une capture d'interface peu précise. Afin d'illustrer ce phénomène nous avons supposé l'injection de l'eau dans une pièce initialement remplie de polymère (FIG. 2). Trois cas différents ont été réalisés, en faisant varier le rapport de viscosité entre l'eau et le polymère. On s'intéresse en particulier à la résolution du problème mécanique (calcul du champ de vitesse) qui va permettre d'advecter l'interface eau/polymère (déterminée par la méthode level-set locale). Les résultats montrent une capture de moins en moins précise lorsque le rapport des viscosités augmente. L'interface eau/polymère traverse une couche d'éléments et la viscosité sur cette couche est pondérée par le taux de remplissage de chaque fluide. La vitesse, fonction de la rhéologie calculée, est mal estimée aux nœuds de l'élément traversé par l'interface. On souhaite alors adapter notre maillage de manière anisotrope de telle sorte que l'on puisse contrôler la couche d'éléments au niveau de l'interface eau/polymère. Une carte de métrique anisotrope distribuée sur le maillage permet de définir les tailles de mailles dans chaque direction de l'espace. Cette métrique est représentée par un tenseur symétrique, défini positif, d'ordre la dimension de l'espace et dont les vecteurs propres déterminent les directions d'allongements des éléments et les valeurs propres définissent les valeurs des tailles de mailles associées. Par exemple, la métrique  $M$  suivante,  $M = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

donnera, dans un repère cartésien, des tailles de mailles de 0.01 dans la direction  $x$  et de 0.0025 dans la direction  $y$ .

Notre interface étant décrite par la variation des gradients d'une fonction level-set, la métrique de type « multi domaine » développée dans Gruau et Coupez (2005) semble la mieux adaptée dans notre cas. On ne désire par ailleurs remailler que sur une certaine épaisseur  $e$  autour de l'interface définie par  $\nabla \alpha = 0$ . Les fonctions  $\alpha$  étant définies sur tout le domaine cette métrique serait appliquée à toutes les lignes de niveaux, ce qui est inutile d'un point de vue de la pertinence de l'information puisque seule l'interface entre l'eau et le polymère nous importe. La métrique finale est alors :

$$M = \begin{cases} \varepsilon^2 I & \text{si } |\alpha| > e/2 \\ (N/e - \varepsilon^2)A + \varepsilon^2 I & \text{sin on} \end{cases} \quad \text{où } A = \frac{\nabla \alpha \otimes \nabla \alpha^T}{\|\nabla \alpha\|^2}$$

et  $N$  le nombre de couches désiré sur l'épaisseur  $e$ ,  $\varepsilon^2$  un paramètre définissant la taille de maille de fond et  $I$  est le tenseur unité.

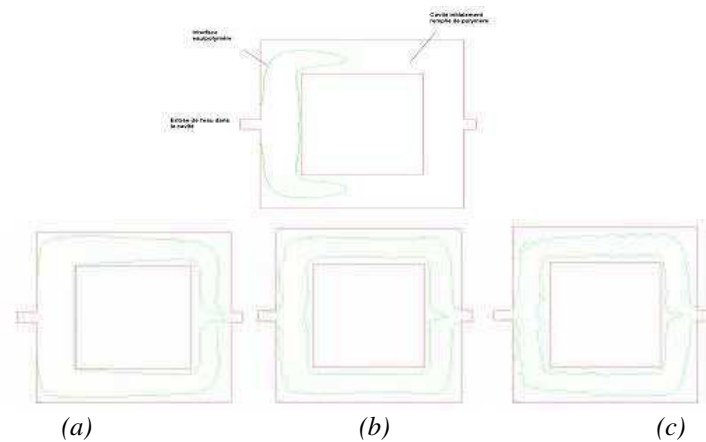


FIG. 2 – illustration de l’injection d’eau dans une cavité remplie de polymère, où est représentée en vert l’interface eau/polymère. En bas, les résultats obtenus : rapport de viscosité de (a) 1, (b) 10 et (c) 100 entre l’eau et le polymère.

### 3.1 Résultats

L’utilité de l’implémentation d’une métrique « multi domaine » peut être illustrée sur un cas simple en 2D. Nous avons supposé l’injection de l’eau (en rouge (FIG. 3)) dans une pièce initialement remplie de polymère (en bleu). Le suivi d’interface est effectué par la méthode level-set locale et on remaille de manière anisotrope en contrôlant le nombre de couches  $N$  sur une certaine épaisseur  $e$ .

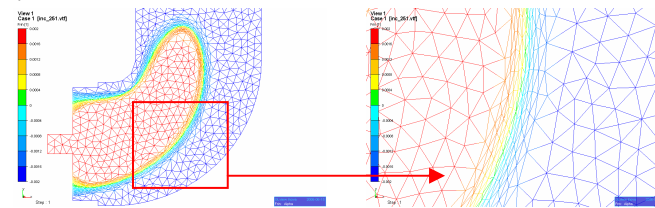
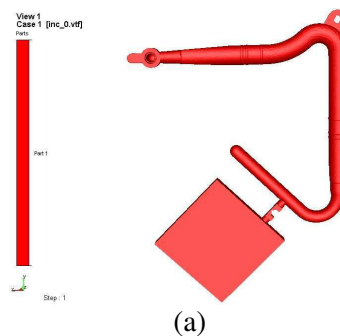


FIG. 3 – Remaillage anisotrope sur une épaisseur  $e$  de  $N$  couches.

Dans l’épaisseur  $e$  et dans la direction de  $\nabla\alpha$  on obtient bien  $N$  éléments de taille  $e/N$  et dans la direction de  $\nabla\alpha^\perp$  on garde une taille de maille égale à celle du maillage de fond.

La même métrique a été utilisée sur un cas industriel proposé par Transvalor S.A. (FIG. 4 (a)). On suppose notre pièce initialement remplie de polymère, on injecte alors l’eau qui vient pousser le polymère que l’on récupère dans une masselotte. Le maillage initial contient 27182 nœuds et l’eau est injectée à une vitesse de 3538 mm/s.

Nous comparons ici la capture d’interface entre notre méthode level-set locale sans (FIG. 4 (b),(c),(d)) et avec remaillage anisotrope ((FIG. 4 (e),(f),(g)) à différents instants de remplissage.



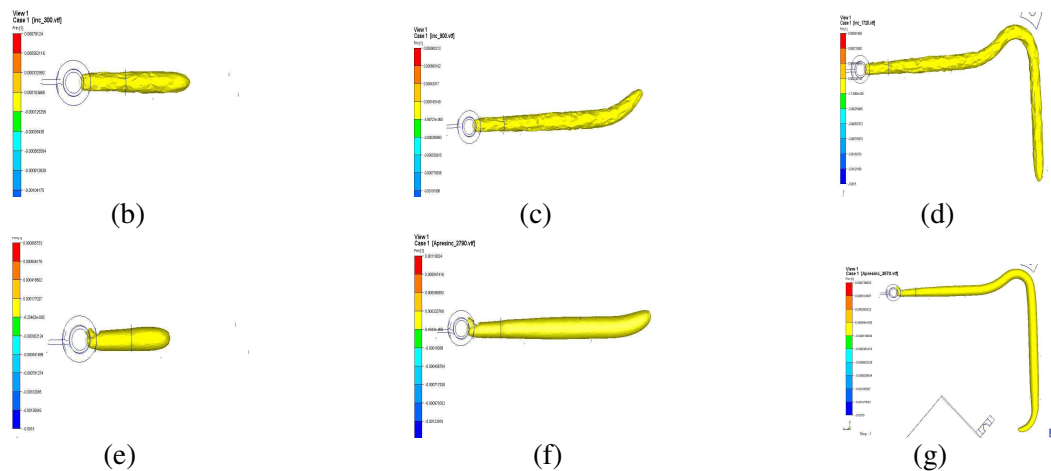


FIG. 4 – Comparaison de l'évolution de la veine d'eau (représentée par l'interface eau polymère, sans (b), (c), (d) et avec remaillage anisotrope (e), (f), (g) à différents instants de remplissage, pour la géométrie représentée dans (a).

Les résultats montrent une capture de la veine d'eau nettement plus efficace lorsque l'on remaille de manière anisotrope sur une certaine épaisseur  $e$  autour de la veine d'eau. L'inconvénient majeur reste les temps de calcul prohibitifs et le coût du stockage mémoire. Le maillage contient alors en effet 119858 nœuds et on obtient, en lançant notre calcul sur 16 processeurs, des temps de calcul de l'ordre de 11h10min en remaillant à chaque résolution des équations de Navier-Stokes alors qu'il était de 2h27min dans le cas sans remaillage.

#### 4 Conclusions et perspectives

La capture d'interface reste un domaine complexe pour les écoulements multiphasiques. La nouvelle fonction level-set locale qui offre des raccordements réguliers de son gradient permet de suivre les différentes phases en présence. Cette capture d'interface est cependant soumise aux fortes discontinuités des paramètres physiques (viscosité, masse volumique etc.) entre chaque milieu. L'enrichissement de la topologie au niveau de l'interface permet de diminuer de façon significative ce phénomène. La métrique basée sur la nouvelle level-set locale permet ainsi de contrôler les tailles de mailles dans chaque direction de l'espace. La prochaine étape consiste à utiliser cette métrique lors de la résolution du problème thermique afin de capturer les chocs thermiques (eau/polymère, polymère/moule) du procédé.

#### Références

- C. Gruau, T. Coupez, 2005 3D tetrahedral, unstructured and anisotropic mesh generation with adaptation to natural and anisotropic mesh generation with adaptation to natural and multidomain metric *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **194** 4951-4976
- D. Peng, B. Merriman, S. Osher, H. Zhao, & M. Kang, 1999 A PDE-Based Fast Local Level Set Method , *Journal of Computational Physics*, **155**, 410.
- Osher, S. and Sethian, J. 1988 Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*. **79** 12-49.
- T. Coupez , 2006 Réinitialisation convective et locale des fonctions Level Set pour le mouvement de surfaces et d'interfaces, *Journées Activités Universitaires de Mécanique La Rochelle*